

Trụ sở chính: 766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do – Hạnh Phúc

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN NĂM HỌC 2016-2017 MÔN: TOÁN KHÔNG CHUYÊN

Thời gian: 120 phút

(Dùng chung cho các lớp chuyên: Toán, Văn và tiếng Anh)

Câu 1: (2 điểm)

a) Cho phương trình: $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ (m là tham số)

- Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbf{R}$.

- Tìm m để $x_1^2 + 2mx_2 - m + \frac{1}{x_2^2 + 2mx_1 - m} = 2$.

b) Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right)$, ($x \geq 0; x \neq 1$).

- Rút gọn P .

- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức: $Q = P - (\sqrt{x} + 1)$ có giá trị nguyên.

Câu 2: (2 điểm)

Cho hàm số $(P): y = x^2$ và $(D): y = 3x + 4$.

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy. Tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng phép toán.

b) Viết phương trình đường thẳng (D') tiếp xúc với Parabol (P) tại $A(-1; 1)$.

Câu 3: (2 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)^2 = 2y+5 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases}$$

b) “ 220.000 ha lúa bị ảnh hưởng hạn, mặn – Bộ nông nghiệp và phát triển nông thôn cho biết có 250.000 hộ gia đình với khoảng 1 nhân khẩu không có nước ngọt sinh hoạt, đặc biệt vùng ven biển như tỉnh Bến Tre...” (nguồn trích báo Tuổi trẻ ngày 20/04/2016).

Người ta dùng 3 máy bơm I, II, III để bơm nước chống hạn cho cánh đồng. Nếu cả 3 máy bơm cùng bơm thì xong sớm hơn máy I bơm một mình 28 ngày, xong sớm hơn máy II bơm một mình là 48 ngày và bằng một nửa thời gian máy III bơm một mình. Hỏi mỗi máy nếu bơm riêng một mình thì mất bao nhiêu ngày mới xong công việc?

Câu 4: (4 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC không qua O. Điểm A bất kỳ trên cung lớn BC (không trùng B, C). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt BC tại M. Phân giác của góc \mathbf{AMB} cắt OA tại I. Đường tròn $(I; IA)$ cắt AB, AC tại E và D. Gọi N là hình chiếu của I lên BC, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N.

b) Chứng minh rằng ED song song với BC.

c) Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng và $\mathbf{KA.KN} = \mathbf{KB}^2$.

d) Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của phân giác góc \mathbf{ACB} và \mathbf{ABC} với đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của KP với AB, G là giao điểm của KQ với AC. Chứng minh rằng HG đi qua J.

 HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (2 điểm)

a) Cho phương trình: $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ (m là tham số)
 - Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbf{R}$.

$a = 1; b = -2m; c = -m - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 2(1)(-m - 1) = 4m^2 + 2m + 2 = 3m^2 + (m + 1)^2 + 1 > 0, \forall m.$

Ta có: $\begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta > 0, \forall m \end{cases} \Rightarrow$ phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbf{R}$

-Tìm m để $x_1^2 + 2mx_2 - m + \frac{1}{x_2^2 + 2mx_1 - m} = 2.$

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2m}{1} = -2m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m-1}{1} = -m-1 \end{cases}$

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ nên ta có:

$\begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 - m - 1 = 0 \\ x_2^2 - 2mx_2 - m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - m = 2mx_1 + 1 \\ x_2^2 - m = 2mx_2 + 1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^2 + 2mx_2 - m + \frac{1}{x_2^2 + 2mx_1 - m} = 2$

$\Leftrightarrow 2mx_2 + 2mx_1 + 1 + \frac{1}{2mx_1 + 2mx_2 + 1} = 2$

$\Leftrightarrow 2m(-2m) + 1 + \frac{1}{2m(-2m) + 1} = 2$

$\Leftrightarrow -4m^2 + 1 + \frac{1}{-4m^2 + 1} = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m^2 + 1 \neq 0 \\ (-4m^2 + 1)^2 + 1 = 2(-4m^2 + 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm \frac{1}{2} \\ [(-4m^2 + 1) - 1]^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm \frac{1}{2} \\ m = 0 \end{cases}$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

b) Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right), (x \geq 0; x \neq 1).$

- Rút gọn P.

$$P = \left(\frac{x + \sqrt{x+1}}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1) - (x+1)} \right)$$

$$P = \left(\frac{x + \sqrt{x+1}}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right)$$

$$P = \left(\frac{x + \sqrt{x+1}}{x+1} \right) : \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \left(\frac{x + \sqrt{x+1}}{x+1} \right) \cdot \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}$$

- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức: $Q = P - (\sqrt{x+1})$ có giá trị nguyên.

$$Q = P - (\sqrt{x+1}) = \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1} - (\sqrt{x+1}) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$$

Để $Q \in \mathbb{Z}$ thì $3 : (\sqrt{x}-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in U(3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in \{1; -1; 3; -3\}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{2; 0; 4; -2\}$$

$$\text{Mà } \sqrt{x} \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x} \in \{2; 0; 4\} \Leftrightarrow x \in \{4; 0; 16\}$$

Câu 2: (2 điểm)

Cho hàm số (P): $y = x^2$ và (D): $y = 3x + 4$.

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy. Tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng phép toán.

Để

a) Viết phương trình đường thẳng (D) tiếp xúc với Parabol (P) tại A (-1; 1).

Gọi (D): $y = mx + n$

Ta có: $A(-1; 1) \in (D): y = mx + n \Rightarrow y_A = ax_A + n \Rightarrow 1 = m(-1) + n \Rightarrow n = m + 1$

Khi đó: (D): $y = mx + m + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là :

$$x^2 = mx + m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 1 = 0 \quad (1)$$

$$a = 1; b = -m; c = -m - 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4(1)(-m-1) = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$$

Trụ sở chính: 766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

Đề (D') tiếp xúc với Parabol (P) thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ (m+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Thế $m = -2$ vào $n = m + 1$, ta được $n = -2 + 1 \Leftrightarrow n = -1$

Câu 3: (2 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)^2 = 2y+5 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 2y+5 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 - (y+1)^2 = 2y+5 - (2x+5) \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - y^2 - 2y = -2(x-y) \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) + 4(x-y) = 0 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+4) = 0 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+4=0 \end{cases} \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=0 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \text{ (I)} \\ \begin{cases} x+y+4=0 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \text{ (II)} \end{cases}$$

Giải hệ (I)
$$\begin{cases} x-y=0 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (y+1)^2 = 2y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$$

Giải hệ (II)
$$\begin{cases} x+y+4=0 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-4 \\ (y+1)^2 = 2(-y-4)+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-4 \\ y^2+4y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là
$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}.$$

b) “220.000 ha lúa bị ảnh hưởng hạn, mặn – Bộ Nông nghiệp và phát triển nông thôn cho biết có 250.000 hộ gia đình với khoảng 1 nhân khẩu không có nước ngọt sinh hoạt, đặc biệt vùng ven biển như tỉnh Bến Tre...” (nguồn trích báo Tuổi trẻ ngày 20/04/2016).

Người ta dùng 3 máy bơm I, II, III để bơm nước chống hạn cho cánh đồng. Nếu cả 3 máy bơm cùng bơm thì xong sớm hơn máy I bơm một mình 28 ngày, xong sớm hơn máy II bơm một mình là 48 ngày và bằng một nửa thời gian máy III bơm một mình. Hỏi mỗi máy nếu bơm riêng một mình thì mất bao nhiêu ngày mới xong công việc?

Gọi a (ngày) là số ngày cả ba máy cùng bơm thì xong công việc ($a \in \mathbb{N}^*$)

x (ngày) là số ngày máy I bơm thì xong công việc ($x \in \mathbb{N}^*$)

y (ngày) là số ngày máy II bơm thì xong công việc ($y \in \mathbb{N}^*$)

z (ngày) là số ngày máy III bơm thì xong công việc ($z \in \mathbb{N}^*$)

Mỗi ngày, cả ba máy cùng bơm được là: $\frac{1}{a}$ (công việc)

Mỗi ngày, máy I bơm được là: $\frac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi ngày, máy II bơm được là: $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trụ sở chính: 766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

Mỗi ngày, máy III bơm được là: $\frac{1}{z}$ (công việc)

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \\ x - a = 28 \\ y - a = 48 \\ a = \frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \\ x = a + 28 \\ y = a + 48 \\ z = 2a \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a+28} + \frac{1}{a+48} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+28} + \frac{1}{a+48} - \frac{1}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{2a(a+48) + 2a(a+28) - (a+28)(a+48)}{2a(a+28)(a+48)} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 96a + 2a^2 + 56a - a^2 - 48a - 28a - 1344 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 76a - 1344 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \quad (\text{nhận}) \\ a = -\frac{112}{3} \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

Với $a = 12$, ta suy ra $x = 40$; $y = 60$; $z = 24$

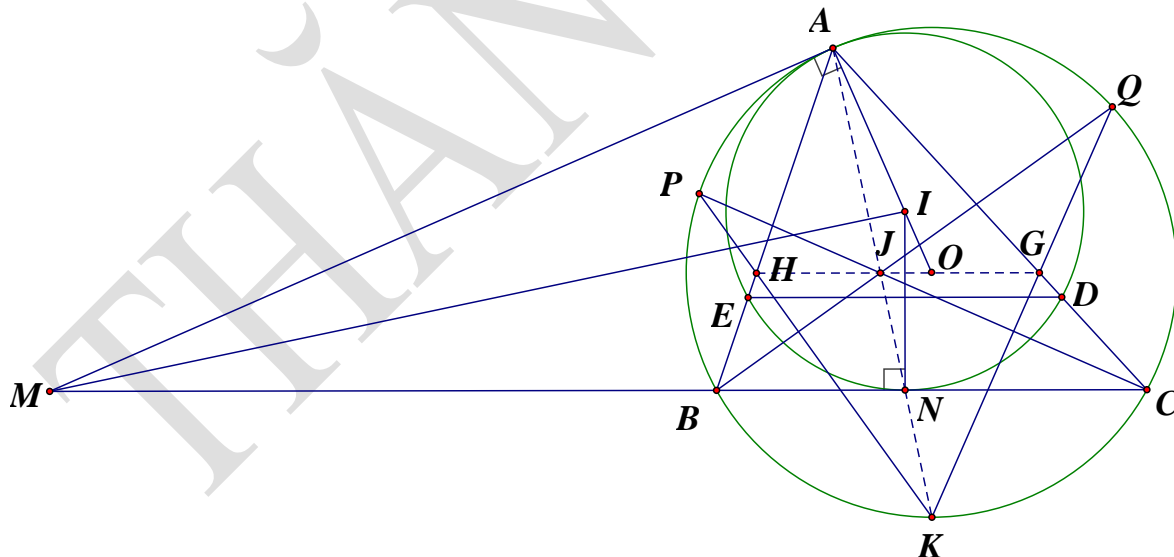
Vậy : máy I bơm riêng một mình xong công việc trong 40 ngày.

máy II bơm riêng một mình xong công việc trong 60 ngày.

máy III bơm riêng một mình xong công việc trong 24 ngày.

Câu 4: (4 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC không qua O. Điểm A bất kỳ trên cung lớn BC (không trùng B, C). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt BC tại M. Phân giác của góc \mathbf{AMB} cắt OA tại I. Đường tròn $(I; IA)$ cắt AB, AC tại E và D. Gọi N là hình chiếu của I lên BC, J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



a) Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N.

$$\Delta INB = \Delta IAM \text{ (ch - gn)} \Rightarrow IN = IA$$

Mà IA là bán kính của $(I; IA)$ nên IN là bán kính của $(I; IA)$

Mặt khác: $BC \perp IN$ tại N (do N là hình chiếu của I lên BC)

Nên BC là tiếp tuyến của đường tròn (I) tại N.

Trụ sở chính: 766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

Suy ra BC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N.

b) Chứng minh rằng ED song song với BC.

Ta có:

$$\begin{cases} \mathbf{MNA = NAC + NCA} \quad (\mathbf{MNA \text{ là góc ngoài đỉnh N của } \Delta NAC}) \\ \mathbf{MAN = NAB + MAB} \\ \mathbf{MAB = NCA} \quad (\mathbf{góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng góc nội tiếp chắn khi cùng chắn AB}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{NAC = NAB}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \mathbf{NAC \text{ là góc nội tiếp chắn ND của (I)} \\ \mathbf{NAB \text{ là góc nội tiếp chắn NE của (I)} \end{cases}$$

Nên $\mathbf{ND = NE} \Rightarrow \mathbf{N}$ là điểm chính giữa ED của (I) $\Rightarrow \mathbf{IN \perp ED}$ mà $\mathbf{IN \perp BC}$ nên $\mathbf{ED // BC}$.

c) Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng và $\mathbf{KA \cdot KN = KB^2}$.

Dễ thấy AK là tia phân giác của BAC

Mà AN là tia phân giác của BAC (vì $\mathbf{NAC = NAB}$)

Nên $\mathbf{AK \equiv AN} \Rightarrow \mathbf{A, N, K}$ thẳng hàng.

Dễ chứng minh: $\Delta \mathbf{KBN} \sim \Delta \mathbf{KAB} \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{\mathbf{KB}}{\mathbf{KA}} = \frac{\mathbf{KN}}{\mathbf{KB}} \text{ (tsdd)} \Rightarrow \mathbf{KN \cdot KA = KB^2}$.

d) Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của phân giác góc ACB và ABC với đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của KP với AB, G là giao điểm của KQ với AC. Chứng minh rằng HG đi qua J.

Dễ chứng minh: C, J, P thẳng hàng và B, J, Q thẳng hàng

Dễ chứng minh $\Delta \mathbf{QJC}$ cân tại Q

Mà QK là đường phân giác nên QK là đường trung trực của đoạn JC

Mặt khác $\mathbf{G \in QK}$ nên $\mathbf{GJ = GC} \Rightarrow \Delta \mathbf{GJC}$ cân tại G $\Rightarrow \mathbf{G \cdot JC = GCJ}$

Mà $\mathbf{GCJ = JCB}$ nên $\mathbf{G \cdot JC = JCB}$

Mặt khác: 2 góc này nằm ở vị trí so le trong nên $\mathbf{JG // BC}$

Cmtt, ta có: $\mathbf{JH // BC}$. Do đó: $\mathbf{JG \equiv JH}$ (Tiên đề Ô-clit) $\Rightarrow \mathbf{HG}$ đi qua J.

📖 HẾT 📖